Coup de cœur mathématique : formule de Madhava-Leibniz

Anh-Mai Stéphan

PLAN :

I] Présentation brève de Pi

II] Formule de Madhava-Leibniz

III] Conclusion sur d'autres formules

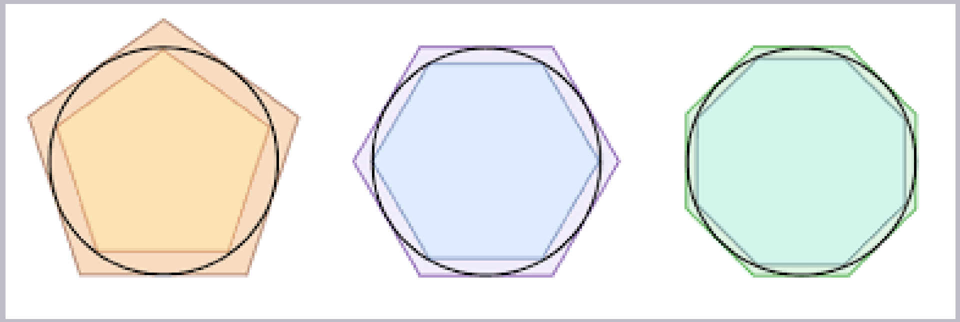
I] PRESENTATION BRÈVE DE PI

- Déjà connu il y a 2 000 ans

- Vient du grec περιφέρεια (XVIIIème s, Euler)

- Différentes méthodes pour l'approcher (ex : Archimède)

- A partir de XV/XVIIème s: séries + calcul intégral -> plus de précision



Méthode d'Archimède pour approcher Pi

II] FORMULE DE MADHAVA-LEIBNIZ

$$\frac{\pi}{4} = \lim(n \to +\infty) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

- $G_n(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots - x^{4n-2}$

$$= \frac{1-(-x^2)^{2n}}{1-(-x^2)} \qquad = \frac{1-x^{4n}}{1+x^2}$$

- $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1-x^{4n}}{1+x^2} + \frac{x^{4n}}{1+x^2} = G_n(x) + \frac{x^{4n}}{1+x^2}$

On intègre entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 dx \frac{1}{1+x^2} = \int_0^1 dx\, G_n(x) + \int_0^1 dx \frac{x^{4n}}{1+x^2}$$

II] FORMULE DE MADHAVA-LEIBNIZ

$$\int_0^1 dx \frac{1}{1+x^2} = \int_0^1 dx\, G_n(x) + \int_0^1 dx \frac{x^{4n}}{1+x^2}$$

Rappel : $G_n(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots - x^{4n-2}$

$$[arctan(x)]_0^1 = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \cdots \frac{x^{4n-1}}{4n-1}\right]_0^1 + \int_0^1 dx \frac{x^{4n}}{1+x^2}$$

$$arctan(1) - arctan(0) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots - \frac{1}{4n-1} + \int_0^1 dx \frac{x^{4n}}{1+x^2}$$

$$\text{donc } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots \frac{-1}{4n-1} = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 dx \frac{x^{4n}}{1+x^2}$$

$$\text{Soit : } \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{((-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 dx \frac{x^{4n}}{1+x^2}$$

II] FORMULE DE MADHAVA-LEIBNIZ

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\left((-1)^k\right.}{2k+1} = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 dx\,\frac{x^{4n}}{1+x^2}$$

- $0 \leq \int_0^1 dx\,\frac{x^{4n}}{1+x^2} \leq \int_0^1 dx\, x^{4n}$

$$0 \leq \int_0^1 dx\,\frac{x^{4n}}{1+\mathrm{x}^2} \leq \frac{1}{4n+1}$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 dx\,\frac{x^{4n}}{1+x^2} = 0$$

II] FORMULE DE MADHAVA-LEIBNIZ

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\left((-1)^k\right.}{2k+1} = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 dx \frac{x^{4n}}{1+x^2}$$

Finalement, on a bien :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

- Convergence lente : 2 millions d'itérations pour 6 décimales

III] D'AUTRES FORMULES

- Sommes infinies : problème de Bale (Euler)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\Pi^2}{6}$$

- Produits infinis : formule de Viète

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \ldots}$$

MERCI POUR VOTRE ATTENTION!